ENSA d'Al-Hoceima | Année 2020/2021
CP-II, 2ème année, | Semestre 3
Algèbre Quadratique, | TD3

Solutions de la Série N^{o}3 : Formes bilinéaires et Formes quaadratiques

Exercice 1
On désigne par E_1, E_2, F et G des espaces vectoriels sur un même corps commutatif $\mathbb{K}$, par u et v des endomorphismes de E, par w une application linéaire de F dans G et par f une application bilinéaire de $E_1 \times E_2$ dans F.

1. Montrer que l'application g de $E_1 \times E_2$ dans F définie par
$$(x, y) \longmapsto f(u(x), v(y))$$
est bilinéaire.
2. Montrer que l'application composée $w \circ f$ est bilinéaire.
3. Soit $E_1 = E_2 = E = \mathbb{K}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Montrer que les applications φ et ψ de $E_1 \times E_2$ dans E définies par
$$\varphi(P, Q) = (PQ)', \quad \text{où} \quad (PQ)' \text{ est la dérivée de } PQ$$
$$\psi(P, Q) = S, \quad \text{où} \quad S(X) = P(X-1)Q(X)$$
sont bilinéaires.

Solution : Considérons E_1, E_2, F et G des espaces vectoriels sur un même corps commutatif $\mathbb{K}$, par u et v des endomorphismes de E, par w une application linéaire de F dans G et par f une application bilinéaire de $E_1 \times E_2$ dans F.

1. Montrons que l'application g de $E_1 \times E_2$ dans F définie par $(x, y) \longmapsto f(u(x), v(y))$ est bilinéaire : en effet, on a $g(x, y) = f(u(x), v(y))$ pour tout $(x, y) \in E_1 \times E_2$.
Soient x, x_1 et x_2 dans E_1, y, y_1 et y_2 dans E_2 et $\alpha \in \mathbb{K}$, alors
   - Linéarité de g par rapport à la première variable :
$$\begin{aligned} g(x_1 + \alpha x_2, y) &= f(u(x_1 + \alpha x_2), v(y)) \\ &= f(u(x_1) + \alpha u(x_2), v(y)) \quad \text{car } u \text{ est linéaire} \\ &= f(u(x_1), v(y)) + \alpha\, f(u(x_2), v(y)) \quad \text{car } f \text{ est bilinéaire} \end{aligned}$$
donc $g(x_1 + \alpha x_2, y) = g(x_1, y) + \alpha\, g(x_2, y)$, d'où g est linéaire par rapport à la première variable.
   - Linéarité de g par rapport à la deuxième variable :
$$\begin{aligned} g(x, y_1 + \alpha y_2) &= f(u(x), v(y_1 + \alpha y_2)) \\ &= f(u(x), v(y_1) + \alpha v(y_2)) \quad \text{car } v \text{ est linéaire} \\ &= f(u(x), v(y_1)) + \alpha\, f(u(x), v(y_2)) \quad \text{car } f \text{ est bilinéaire} \end{aligned}$$
donc $g(x, y_1 + \alpha y_2) = g(x, y_1) + \alpha\, g(x, y_2)$, d'où g est linéaire par rapport à la deuxième variable.

   ce qui prouve que $g : E_1 \times E_2 \mapsto F$ est bilinéaire.
2. Montrons que l'application composée $w \circ f$ est bilinéaire : en effet, l'application $h = w \circ f$ est définie de $E_1 \times E_2$ dans G par
$$w \circ f(x, y) = w(f(x, y)) \quad \forall (x, y) \in E_1 \times E_2.$$
Soient x, x_1 et x_2 dans E_1, y, y_1 et y_2 dans E_2 et $\alpha \in \mathbb{K}$, alors

– Linéarité de $w \circ f$ par rapport à la première variable :

$$\begin{array}{rcl} h(x_1+\alpha x_2, y) & = & w(f(x_1+\alpha x_2, y)) \\ & = & w(f(x_1,y)+\alpha f(x_2,y)) \quad \text{car } f \text{ est bilinéaire} \\ & = & w(f(x_1,y))+\alpha\, w(f(x_2,y)) \quad \text{car } w \text{ est linéaire} \end{array}$$

donc $w \circ f(x_1+\alpha x_2, y) = w \circ f(x_1,y) + \alpha\, w \circ f(x_2,y)$, d'où $w \circ f$ est linéaire par rapport à la première variable.

– Linéarité de $w \circ f$ par rapport à la deuxième variable :

$$\begin{array}{rcl} w \circ f(x, y_1+\alpha y_2) & = & w(f(x, y_1+\alpha y_2)) \\ & = & w(f(x,y_1)+\alpha f(x,y_2)) \quad \text{car } f \text{ est bilinéaire} \\ & = & w(f(x,y_1))+\alpha\, w(f(x,y_2)) \quad \text{car } w \text{ est bilinéaire} \end{array}$$

donc $w \circ f(x, y_1+\alpha y_2) = w \circ f(x,y_1) + \alpha\, w \circ f(x,y_2)$, d'où $w \circ f$ est linéaire par rapport à la deuxième variable.

D'où $w \circ f$ est une application bilinéaire de $E_1 \times E_2$ dans G.

3. On prend $E_1 = E_2 = E = \mathbb{K}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Montrons que les applications φ et ψ de $E_1 \times E_2$ dans E définies par

$$\varphi(P,Q) = (PQ)', \quad \text{où} \quad (PQ)' \text{ est la dérivée de } PQ$$

$$\psi(P,Q) = S, \quad \text{où} \quad S(X) = P(X-1)Q(X)$$

sont bilinéaires : en effet, soient P, P_1 et P_2 dans E_1, Q, Q_1 et Q_2 dans E_2 et $\alpha \in \mathbb{K}$, alors

– Montrons que $\varphi : \; E_1 \times E_2 \mapsto E$, $\varphi(P,Q) = (PQ)'$ est bilinéaire : soit X un variable dans $\mathbb{K}$, on a

- Linéarité de φ par rapport à la première variable :

$$\begin{array}{rcl} \varphi(P_1+\alpha\, P_2, Q)(X) & = & ((P_1+\alpha\, P_2)Q)'(X) \\ & = & (P_1+\alpha\, P_2)'(X)Q(X) + (P_1+\alpha\, P_2)(X)Q'(X) \\ & = & (P_1'(X)+\alpha\, P_2'(X))Q(X) + (P_1(X)+\alpha\, P_2(X))(X)Q'(X) \\ & = & (P_1'(X)Q(X)+P_1(X)Q'(X)) + \alpha\,(P_2'(X)Q(X)+P_2(X)Q'(X)) \\ & = & (P_1Q)'(X) + \alpha\,(P_2Q)'(X) \end{array}$$

donc $\varphi(P_1+\alpha\, P_2, Q)(X) = (\varphi(P_1,Q)+\alpha\,\varphi(P_2,Q))(X)$ pour tout $X \in \mathbb{K}$;
d'où $\varphi(P_1+\alpha\, P_2, Q) = \varphi(P_1,Q)+\alpha\,\varphi(P_2,Q)$.

- Linéarité de φ par rapport à la deuxième variable :

$$\begin{array}{rcl} \varphi(P, Q_1+\alpha\, Q_2)(X) & = & (P(Q_1+\alpha\, Q_2))'(X) \\ & = & P'(X)(Q_1+\alpha\, Q_2)(X) + P(X)(Q_1+\alpha\, Q_2)'(X) \\ & = & P'(X)(Q_1(X)+\alpha\, Q_2(X)) + P(X)(Q_1'(X)+\alpha\, Q_2'(X)) \\ & = & (P'(X)Q_1(X)+P(X)Q_1'(X)) + \alpha\,(P'(X)Q_2(X)+P(X)Q_2'(X)) \\ & = & (PQ_1)'(X) + \alpha\,(PQ_2)'(X) \end{array}$$

donc $\varphi(P, Q_1+\alpha\, Q_2)(X) = (\varphi(P,Q_1)+\alpha\,\varphi(P,Q_2))(X)$ pour tout $X \in \mathbb{K}$;
d'où $\varphi(P, Q_1+\alpha\, Q_2) = \varphi(P,Q_1)+\alpha\,\varphi(P,Q_2)$.

ce qui prouve que φ est une application bilinéaire de $E_1 \times E_2$ dans E.

– Montrons que $\psi : \; E_1 \times E_2 \mapsto E$, $\psi(P,Q) = S$, où $S(X) = P(X-1)Q(X)$ est bilinéaire : soit X un variable dans $\mathbb{K}$, on a

- Linéarité de φ par rapport à la première variable :

$$\begin{array}{rcl} \psi(P_1+\alpha\, P_2, Q)(X) & = & (P_1+\alpha\, P_2)(X-1)Q(X) \\ & = & (P_1(X-1)+\alpha\, P_2(X-1))Q(X) \\ & = & (P_1(X-1)Q(X)) + \alpha\,(P_2(X-1)Q(X)) \\ & = & \psi(P_1,Q)(X) + \alpha\,\psi(P_2,Q)(X) \end{array}$$

donc $\psi(P_1 + \alpha\, P_2, Q)(X) = (\psi(P_1, Q) + \alpha\, \psi(P_2, Q))(X)$ pour tout $X \in \mathbb{K}$;
d'où $\psi(P_1 + \alpha\, P_2, Q) = \psi(P_1, Q) + \alpha\, \psi(P_2, Q)$.

- Linéarité de φ par rapport à la deuxième variable :

$$\begin{aligned}
\psi(P, Q_1 + \alpha\, Q_2)(X) &= P(X-1)(Q_1 + \alpha\, Q_2)(X) \\
&= P(X-1)(Q_1(X) + \alpha\, Q_2(X)) \\
&= (P(X-1)Q_1(X)) + \alpha\, (P(X-1)Q_2(X)) \\
&= \psi(P, Q_1)(X) + \alpha\, \psi(P, Q_2)(X)
\end{aligned}$$

donc $\psi(P, Q_1 + \alpha\, Q_2)(X) = (\psi(P, Q_1) + \alpha\, \psi(P, Q_2))(X)$ pour tout $X \in \mathbb{K}$;
d'où $\psi(P, Q_1 + \alpha\, Q_2) = \psi(P, Q_1) + \alpha\, \psi(P, Q_2)$.

ce qui prouve que ψ est une application bilinéaire de $E_1 \times E_2$ dans E.

$\square$

Exercice 2

Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps commutatif $\mathbb{K}$ et $\{u_1, \ldots, u_m\}$ et $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sont des bases de E et F respectivement. Soit T un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension mn et les mn vecteurs d'une base de T notés e_{ij} sont indexés par les couples d'entiers (i, j) tels que $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$. On définit l'application φ de l'ensemble produit $E \times F$ dans T par

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \xi_i \eta_j e_{ij} \quad \text{si} \quad x = \sum_{i=1}^{m} \xi_i u_i \quad \text{et} \quad y = \sum_{j=1}^{n} \eta_j v_j$$

1. (a) Montrer que, si H un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ et f une application bilinéaire de $E \times F$ dans H, alors il existe une application linéaire et une seule g de T dans H telle que

$$f = g \circ \varphi.$$

   (b) Soient $\mathcal{B}(E, F; H)$ l'espace vectoriel des applications bilinéaires de $E \times F$ dans H et $\mathscr{L}(T, H)$ l'espace des applications linéaires de T dans H.
   Quelles sont les propriétés de l'application $\Phi : \mathcal{B}(E, F; H) \to \mathscr{L}(T, H)$, $f \mapsto g = \Phi(f)$.
2. Vérifier que Φ est linéaire.
3. On désigne par $\{u'_1, \ldots, u'_m\}$ et $\{v'_1, \ldots, v'_n\}$ des bases de E et F.
   (a) Ecrire l'expression de $\varphi(x, y)$ en fonction des coordonnées $\xi_1, \ldots, \xi_m$ et $\eta'_1, \ldots, \eta'_n$ de x et y dans les bases $\{u'_1, \ldots, u'_m\}$ et $\{v'_1, \ldots, v'_n\}$.
   (b) Montrer que les vecteurs $e'_{hk} = \varphi(u'_h, v'_k)$ forment une base de T, puis donner les coordonnées de ces vecteurs dans la base e_{ij} en fonction des termes des matrices de passage des bases $\{u_1, \ldots, u_m\}$ et $\{v_1, \ldots, v_n\}$ aux bases $\{u'_1, \ldots, u'_m\}$ et $\{v'_1, \ldots, v'_n\}$
4. Peut-on définir pour les applications trilinéaires une décomposition qui généralise celle indiquée en question 1. our les applications bilinéaires ?

Solution : Considérons E et F deux espaces vectoriels sur un même corps commutatif $\mathbb{K}$ et $\{u_1, \ldots, u_m\}$ et $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sont des bases de E et F respectivement. Soit T un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension mn et les mn vecteurs d'une base de T notés e_{ij} sont indexés par les couples d'entiers (i, j) tels que $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$. On définit l'application φ de l'ensemble produit $E \times F$ dans G par

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \xi_i \eta_j e_{ij} \quad \text{si} \quad x = \sum_{i=1}^{m} \xi_i u_i \quad \text{et} \quad y = \sum_{j=1}^{n} \eta_j v_j$$

1. (a) Montrons que, si H un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ et f une application bilinéaire de $E \times F$ dans H, alors il existe une application linéaire et une seule g de T dans H telle que $f = g \circ \varphi$:

en effet, on désigne par $(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ les coordonnées de x et $(\eta_1, \ldots, \eta_m)$ les coordonnées de y. Les applications $\varphi_{i,j}$ définies par

$$\varphi_{ij}(x, y) = \xi_i \eta_j \, e_{ij}$$

sont bilinéaires, et donc l'application φ est aussi bilinéaire comme étant la somme des applications bilinéaires φ_{ij}.
On sait que f est une application bilinéaire :

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \xi_i \eta_j f(u_i, v_j)$$

et que, si g était une application linéaire, alors on ait

$$g(\varphi(x, y)) = g\left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \xi_i \eta_j e_{ij}\right) = \varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \xi_i \eta_j g(e_{ij})$$

Donc les applications f et $g \circ \varphi$ sont égales si et seulement si $g(e_{ij}) = f(u_i, v_j)$ pour tout $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$.
Ces équations déterminent une application g et une seule : en effet, il existe une application linéaire et une seule qui transforme les vecteurs d'une base de l'espace de départ (ici les vecteurs e_{ij} de G) en des vecteurs donnés de l'espace d'arrivée (ici les vecteurs $f(u_i, v_j)$)

(b) Soient $\mathcal{B}(E, F; H)$ l'espace vectoriel des applications bilinéaires de $E \times F$ dans H et $\mathscr{L}(T, H)$ l'espace des applications linéaires de T dans H.
les propriétés de l'application $\Phi : \mathcal{B}(E, F; H) \to \mathscr{L}(T, H)$, $f \mapsto g = \Phi(f)$: L'application Φ qui à f associe g est unisomorphisme de $\mathcal{B}(E, F; H)$ dans $\mathscr{L}(T, H)$ comme le montre le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
f \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{Isomorphisme}"] & g \arrow[d, leftrightarrow, "\text{Isomorphisme}"] \\
\{f(u_i, v_j)\} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{Égalité}"] & \{g(e_{ij})\}
\end{tikzcd}$$

où les doubles flèches représententles isomorphismes de $\mathcal{B}(E, F; H)$ et H^{mn} (resp. $\mathscr{L}(T, H)$ et H^{mn}) obtenus en associant à une application bilinéaire f (resp. à une application linéaire g) l'ensemble des mn vecteurs $f(u_i, v_j)$ (resp. $g(e_{ij})$) considéré comme éléments de l'espace vectoriel H^{mn}.
<u>Propriété :</u> On notera que la construction de l'application φ permet de remplacer l'étude de toute application bilinéaire définie dans $E \times F$ par celle d'une application linéaire définie dans T.

2. L'application Φ est linéaire, en effet, soient f_1 et f_2 dans $\mathcal{B}(E, F; H)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\Phi(f_1 + \lambda f_2) = g$ où $g(e_{ij}) = (f_1 + \lambda f_2)(u_i, v_j)$ pour tout $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$; donc

$$g(e_{ij}) = (f_1 + \lambda f_2)(u_i, v_j) = g(e_{ij}) = f_1(u_i, v_j) + \lambda f_2(u_i, v_j) = g_1(e_{ij}) + \lambda g_2(e_{ij})$$

d'où $\Phi(f_1 + \lambda f_2) = g_1 + \lambda g_2 = \Phi(f_1) + \lambda \Phi(f_2)$; ce qui prouve que Φ est linéaire.

3. On désigne par $\{u'_1, \ldots, u'_m\}$ et $\{v'_1, \ldots, v'_n\}$ des bases de E et F.
   (a) L'expression de $\varphi(x, y)$ en fonction des coordonnées $\xi_1, \ldots, \xi_m$ et $\eta'_1, \ldots, \eta'_n$ de x et y dans les bases $\{u'_1, \ldots, u'_m\}$ et $\{v'_1, \ldots, v'_n\}$: en effet, nous désignons par $A = (a_{ih})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq h \leq m}}$ la matrice de passage de la base $\{u_1, \ldots, u_m\}$ à la base $\{u'_1, \ldots, u'_m\}$ et $B = (b_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq n}}$ la matrice de

passage de la base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ à la base $\{v'_1, \ldots, v'_n\}$.
L'application φ est bilinéaire ; par suite :

$$\varphi(x,y) = \varphi\left(\sum_{h=1}^{m} \xi'_h u'_h, \sum_{k=1}^{n} \eta'_k v'_k\right) = \sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \xi'_h \eta'_k \varphi(u'_h, v'_k)$$

d'où $\varphi(x,y) = \displaystyle\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \xi'_h \eta'_k e'_{hk}$ où $e'_{hk} = \varphi(u'_h, v'_k)$.

(b) Montrons que les vecteurs $e'_{hk} = \varphi(u'_h, v'_k)$ forment une base de G : les vecteurs $e_{ij} = \varphi(u_i, v_j)$ sont des combinaisons linéaires des vecteurs $e'_{hk} = \varphi(u'_h, v'_k)$; les vecteurs e'_{hk} sont donc des générateurs de l'espace T et, leur nombre mn est la dimension de l'espace T, constituent une base de l'espace.
Les coordonnées de ces vecteurs dans la base e_{ij} en fonction des termes des matrices de passage des bases $\{u_1, \ldots, u_m\}$ et $\{v_1, \ldots, v_n\}$ aux bases $\{u'_1, \ldots, u'_m\}$ et $\{v'_1, \ldots, v'_n\}$: Les expressions des vecteurs e'_{hk} en fonction des vecteurs e_{ij} s'obtiennent en écrivant :

$$\begin{aligned} e'_{hk} &= \varphi(u'_h, v'_k) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ih} u_i, \sum_{j=1}^{n} b_{jk} v_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ih}\, b_{jk}\, \varphi\,(u_i, v_j) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ih}\, b_{jk}\, e_{ij} \end{aligned}$$

d'où $e'_{hk} = \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ih}\, b_{jk}\, e_{ij}$.

4. Pour les applications trilinéaires, on peut définir une décomposition qui généralise celle indiquée en question 1. des applications bilinéaires : en effet, si E, F et G sont trois espaces vectoriels de dimension m, n et p sur le même corps $\mathbb{K}$ et T un espace vectoriel de dimension mnp sur $\mathbb{K}$, nous choisirons des bases $\{u_1, \ldots, u_m\}$, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ et $\{w_1, \ldots, w_p\}$ de E, F et G, respectivement, et une base $e_{ij\ell}$ de T que nous indexerons par les triplets d'entiers.
L'application ψ définie par :

$$\psi(x,y,z) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{p} \xi_i \eta_j \zeta_\ell e_{ij\ell} \quad \text{où} \quad x = \sum_{i=1}^{m} \xi_i u_i, \quad y = \sum_{j=1}^{n} \eta_j v_j \quad \text{et} \quad z = \sum_{\ell=1}^{p} \zeta_\ell w_\ell$$

est **trilinéaire** et on montre comme dans la question 1. que si f est une application trilinéaire de $E \times F \times G$ dans H, alors il existe une application linéaire et une seule g de T dans H telle que $f = g \circ \psi$.
En effet l'application g est définie par

$$f(u_i, v_j, w_\ell) = \psi(e_{ij\ell}).$$

En associant à toute aaplication trilinéaire f l'application linéaire g que nous venons de définir, on obtient un isomorphisme de l'espace vectoriel des applications trilinéaires de $E \times F \times G$ dans H, noté $\mathrm{T}\mathscr{L}(E,F,G;H)$ dans l'espace vectoriel des applications linéaires de T dans H, noté $\mathscr{L}(T,H)$.

Remarques :

1. Les espaces vectoriels T que nous avons utilisés pour définir φ et psi s'appellent les **produits tensoriels** $E \otimes E$ ou $E \otimes F \otimes G$ et on adopte les écritures $\varphi(x,y) = x \otimes y$ et $\varphi(x,y,z) = x \otimes y \otimes z$.
2. L'étude faite pour les cas **Bilinéaire** et **Trilinéaire** peut évidemment être généralisée sans difficultés aux applications p-linéaires.

$\square$

Exercice 3
Soit Ω une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, on sait que :

(i) il existe des formes linéaires indépendantes f_i telle que

$$\Omega(x) = \sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i f_i^2(x) \quad \text{où} \quad \varepsilon_i = \pm 1$$

(ii) le nombre p des formes f_i est le même pour toutes les décompositions de Ω du type précédent (p est le rang de Ω).

Établir que pour deux décompositions de ce type, le nombre des coefficients ε_i égaux à 1 est le même (et donc aussi le nombre des coefficients ε_i égaux à (-1)).

Solution : Considérons une forme quadratique Ω sur $\mathbb{R}^n$, on sait que :

(i) il existe des formes linéaires indépendantes f_i telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\Omega(x) = \sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i f_i^2(x) \quad \text{où} \quad \varepsilon_i = \pm 1$$

(ii) le nombre p des formes f_i est le même pour toutes les décompositions de Ω du type précédent (p est le rang de Ω).

Supposons que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\Omega(x) = \sum_{i=1}^{h} f_i^2(x) - \sum_{i=h+1}^{p} f_i^2(x) = \sum_{i=1}^{k} g_i^2(x) - \sum_{i=k+1}^{p} g_i^2(x) \tag{3.1}$$

oùp est le nombre total des formes f_i et g_i (c'est le même por les deux décompositions d'après la propriété (ii), h et k sont les nombres des coefficients ε égaux à 1 dans les deux décompositions ; nous supposerons que $h \leq k$ (en changeant si nécessaire l'ordre des deux décompositions).
L'équation (3.1) implique :

$$\sum_{i=1}^{h} f_i^2(x) + \sum_{i=k+1}^{p} g_i^2(x) = \sum_{i=h+1}^{p} f_i^2(x) + \sum_{i=1}^{k} g_i^2(x) \tag{3.2}$$

Le premier membre de l'équation (3.2) contient $p-k+h = p-(k-h)$ formes linéaires ; les zéros communs à ces formes constituent donc un espace vectoriel E de dimension au moins égale à $n - [p-(k-h)] = n - p + (k-h)$ (il y a égalité ou non suivant que ces formes sont indépendantes ou non).
les vecteurs de E annulent le premier membre de l'équation (3.2), donc aussi le second membre ; et par suite toutes formes du second membre puisque ce second membre est une somme de carrés. Les vecteurs de E annulent donc toutes les formes f_i, et puisque ces p formes sont indépendantes, alors la dimension de E est au plus égale à $n - p$.
Finalement, on a

$$n - p + (k-h) \leq \dim(E) \leq n - p$$

et donc $k - h \leq 0$ ce qui, correspond à l'hypothèe faite, entraîne $h = k$.
Propriété : Dans la décomposition d'une forme quadratique Ω sur $\mathbb{R}^n$ en une somme de carrés, le nombre des carrés positifs et le nombre des carrés négatifs sont des **invariants**. □

Exercice 4

On considère la forme quadratique f définie dans $\mathbb{R}^4$ par :

$$f(X) = x^2 + 2y^2 - z^2 + 2t^2 + 2xy + 2xt + 2yt + 2yz - 2zt$$

où x, y, z, t désignent les coordonnées de X dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. Déterminer des formes linéaires indépendantes ℓ_i telles que :

$$f(X) = \sum_i \varepsilon_i [\ell_i(X)]^2, \quad \text{avec} \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

2. Indiquer une base de $\mathbb{R}^4$ telle que la matrice de f dans cette base soit diagonale.

Solution : Considérons la forme quadratique f définie dans $\mathbb{R}^4$ par :

$$f(X) = x^2 + 2y^2 - z^2 + 2t^2 + 2xy + 2xt + 2yt + 2yz - 2zt$$

où x, y, z, t désignent les coordonnées de X dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. Déterminons des formes linéaires indépendantes ℓ_i telles que $f(X) = \sum_i \varepsilon_i[\ell_i(X)]^2$ où $\varepsilon_i = \pm 1$: en effet, la forme quadratique $f(X)$ est un trinôme en z que nous pouvons mettre sous la forme

$$f(X) = \varepsilon_1[\ell_1(X)]^2 + g(X)$$

alors nous cherchons une forme ℓ_1 telle que la différence $g(X) = f(X) - \varepsilon_1[\ell_1(X)]^2$ ne contienne plus une des variables, x par exemple, et opérerons de même avec g et ainsi de suite.
En mettant sous forme canonique $f(X)$ considérée comme trinôme en x, nous obtenons :

$$\begin{array}{rcl} f(X) & = & (x+y+t)^2 + g(X) \\ g(X) & = & y^2 - z^2 + t^2 + 2yz - 1zt \\ & = & (y+z)^2 + (t-z)^2 - 3z^2 \end{array}$$

soit

$$\begin{array}{rcl} f(X) & = & (x+y+t)^2 + (y+z)^2 + (t-z)^2 - 3z^2 \\ & = & [\ell_1(X)]^2 + [\ell_2(X)]^2 + [\ell_3(X)]^2 - [\ell_4(X)]^2. \end{array}$$

où $\ell_1(X) = x + y + t$, $\ell_2(X) = y + z$, $\ell_3(X) = t - z$ et $\ell_4(X) = \sqrt{3}\, z$.
Les formes ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 et ℓ_4 son tindépendantes puisque chacune contient une variable qui ne figure pas dans les autres qui restent : x pour ℓ_1, y pour ℓ_2 et t pour ℓ_3.
Le matrice de f sera diagonale si, par exemple, les coordonnées de X dans la nouvelle base $\mathcal{B}$ sont

$$x' = \ell_1(X), \quad y' = \ell_2(X), \quad z' = \ell_3(X) \quad \text{et} \quad t' = \ell_4(X).$$

2. Une base de $\mathbb{R}^4$ telle que la matrice de f dans cette base soit diagonale : Si U et U' sont les matrices colonnes des coordonnées de X dans la base canonique et la base $\mathcal{B}$ et si P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$, alors on sait que :

$$U' = P^{-1}U \quad \Leftrightarrow \quad U = PU'$$

La matrice P^{-1} est donc la matrice des coefficients des formes ℓ_i ; son inverse P s'obtient en calculant x, y, z et t en fonction de x', y', z' et t' ; ce qui se fait aisément parce que chaque équation donne la valeur d'une des inconnues ; on obtient :

$$U' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = P^{-1}U$$

et

$$U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}}_{P} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = PU'$$

d'où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$\square$

Exercice 5
On considère la forme quadratique f définie dans $\mathbb{R}^3$ par :

$$f(X) = 4x^2 + 4y^2 + z^2 + 2yz + 2zx - 4xy$$

où x, y, z désignent les coordonnées de X dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer le rang de la forme f et chercher si cette forme est positive (On pourra pour cela écrire f comme combinaison linéaire des carrés de formes linéaires indépendantes).
2. Déterminer la matrice A de la forme quadratique f.
3. Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de la forme f dans cette base soit diagonale ; on donnera la matrice de passage P et son inverse P^{-1}.
4. Utiliser les résultats du 3. pour retrouver les résultats du 1..

Solution : Considérons la forme quadratique f définie dans $\mathbb{R}^3$ par :

$$f(X) = 4x^2 + 4y^2 + z^2 + 2yz + 2zx - 4xy$$

où x, y, z désignent les coordonnées de X dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. – Le rang de la forme f : on peut écrire $f(X)$ sous la forme canonique :

   $$\begin{aligned} f(X) &= (x+y+z)^2 + 3x^2 + 3y^2 - 6xy \\ &= (x+y+z)^2 + 3(x-y)^2 \end{aligned}$$

   donc $f(X) = [\ell_1(X)]^2 + [\ell_2(X)]^2$ où $\ell_1(X) = x+y+z$ et $\ell_2(X) = x-y$.
   – Étudions la positivité de la forme f : on remarque que $f(X)$ est la somme de carrés positifs, soit $f(X) = [\ell_1(X)]^2 + [\ell_2(X)]^2$ où $\ell_1(X) = x+y+z$ et $\ell_2(X) = x-y$. D'où, la forme quadratique f est de rang 2 et est positive.
2. La matrice A de la forme quadratique f est définie telle que $f(X) = X^T AX$ où $X = (x, y, z)^T$; donc

   $$f(X) = (x, y, z) \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

   d'où

   $$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. – Déterminons une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de la forme f dans cette base soit diagonale : en effet, le polynôme caractéristique $P_A(x)$ de A est $P_A(x) = \det(A - xI_3)$

   $$\begin{aligned} \det(A - xI_3) &= \begin{vmatrix} 4-x & -2 & 1 \\ -2 & 4-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} \\ &= (4-x)\begin{vmatrix} 4-x & 1 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 4-x \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (4-x)((4-x)(1-x)-1) + 2(-2(1-x)-1) + (-2-4+x) \\ &= -x^3 + 9x^2 - 18x \end{aligned}$$

d'où $P_A(x) = -x(x-3)(x-6)$. La matrice A a pour valeurs propres $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$ et $\lambda_3 = 6$. Les valeurs propres sont simples et distinctes, alors la matrice A est diagonalisable. On peut ensuite calculer les vecteurs propres et sous-espaces propres de A associés aux valeurs propres $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$ et $\lambda_3 = 6$.

- Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A associé à 0, alors $Au = 0_{\mathbb{R}^3}$ c'est à dire que

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x - 2y + z = 0 \\ -2x + 4y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = x \\ z = -2x \end{cases}$$

d'où $u = \begin{pmatrix} x \\ x \\ -2x \end{pmatrix}$ où $x \in \mathbb{R}$; puis on cherche x tel que $\|u\|_2^2 = x^2 + x^2 + 4x^2 = 1$, donc $6x^2 = 1$, d'où $x == \pm\frac{\sqrt{6}}{6}$; d'où l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre 0 est $\mathrm{Ker}(A)$ engendré par le vecteur normalisé $u_0 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$; d'où

$$\mathrm{Ker}(A) = \{\alpha u_0 \ : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

qui est une droite vectorielle de vecteur directeur $u = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$.

- Soit $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A associé à 3, alors $Av = 3\,v$ c'est à dire que

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x - 2y + z = 3x \\ -2x + 4y + z = 3y \\ x + y + z = 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = x \\ z = x \end{cases}$$

d'où $v = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}$ où $x \in \mathbb{R}$; puis on cherche x tel que $\|v\|_2^2 = x^2 + x^2 + x^2 = 1$, donc $3x^2 = 1$, d'où $x == \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$; d'où l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre 3 est $\mathrm{Ker}(A - 3I_3)$ engendré par le vecteur normalisé $v_0 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$; d'où

$$\mathrm{Ker}(A - 3I_3) = \{\alpha v_3 \ : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

qui est une droite vectorielle de vecteur directeur $v_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$.

- Soit $w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A associé à 6, alors $Aw = 6\,w$ c'est à dire que

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x - 2y + z = 6x \\ -2x + 4y + z = 6y \\ x + y + z = 6z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -x \\ z = 0 \end{cases}$$

d'où $v = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ où $x \in \mathbb{R}$; puis on cherche x tel que $\|w\|_2^2 = x^2 + x^2 = 1$, donc $2x^2 = 1$, d'où $x == \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; d'où l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre 6 est $\mathrm{Ker}(A - 6I_3)$ engendré par le vecteur normalisé $v_0 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$; d'où

$$\mathrm{Ker}(A - 6I_3) = \{\alpha w_6 \ : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

qui est une droite vectorielle de vecteur directeur $w_6 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

– La matrice de passage P et son inverse P^{-1} : Les sous-espaces propres $\mathrm{Ker}(A)$, $\mathrm{Ker}(A - 3I_3)$ et $\mathrm{Ker}(A - 6I_3)$ sont des droites vectorielles ; donc elles sont de dimension 1, soit

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(A) \oplus \mathrm{Ker}(A - 3I_3) \oplus \mathrm{Ker}(A - 6I_3)$$

est la somme directe de sous-espaces propres. D'où A est diagonalisable ; d'où il existe une matrice P formée de vecteurs propres orthonormés $P = (u_0|v_3|w_6)$ telle que $D = P^{-1}AP$ où

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

4. On peut utiliser les résultats de la question 3. pour retrouver les résultats de la question 1., à savoir la positivité de la forme quadratique f, en effet, on a

$$f(X) = X^T AX = X^T PDP^{-1}X$$

La matrice P est orthogonale, alors $P^T = P^{-1}$; donc $f(X) = X^T PDP^T X$.
On pose $Y = P^T X$, alors $Y^T = X^T P$; donc $\widetilde{f}(Y) = f(P^T X) = Y^T DY$.
Soit $Y = (x', y', z')^T$ on a bien

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

x', y' et z' sont les coordonnées de X dans la nouvelle base $\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{pmatrix} = P^T \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$ où $\{e_1, e_2, e_3\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
D'où $f(P^T X) = 3y'^2 + 6z'^2$, ainsi on retrouve que f est de rang 2 et est positive.
Pour déterminer le rang d'une forme quadratique et reconnaître si elle est positive ou non positive, on peut donc :

– soit décomposer cette forme en une combinaison linéaire de carrés de forme indépendantes comme ne question 1. : le nombre des carrés est le rang ; la forme est positive si ces carrés sont tous précédés du signe $+$;
– soit écrire l'équation caractéristique de la matrice A de la forme quadratique : chercher si 0 est racine et déterminer son ordre qui est la dimension du noyau (la différence entre la dimension de l'espace et le rang) et étudier le signe des autres racines (la forme est positive si elles sont toutes positives)

Il est clair que l'étude du signe des racines d'une équation algébrique est une opération assez longue, sauf dans le cas exceptionnel où ces racines ont des valeurs numériques simples et peuvent être obtenues rapidement. La première méthode est donc préférable.

$\square$

Exercice 6

On déssigne par f une forme quadratique $\mathbb{R}^n$ et par $A = (a_{ij})$ sa matrice dans la base canonique ; on écrira :

$$f(X) = X^T AX = (AX, X)$$

où $X = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ est le vecteur X relativament à la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
On suppose que la forme f est positive non dégénérée.

1. Montrer qu'il existe des formes linéaires ℓ_i telles que :

$$\ell_i(X) = \sum_{j \geq i} a_{ij}\xi_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n} [\ell_i(X)]^2$$

et que ces formes sont uniques si on impose les conditions :

$$a_{ij} \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

2. Montrer qu'il existe une matrice triangulaire supérieure et une seule $T = (\theta_{ij})$ satisfaisant aux conditions : "les termes θ_{ii} de la diagonale sont positifs $A = T^T T$"
3. Peut-on énoncer un résultat analogue à celui du $2)$ si la A est la matrice d'une forme quadratique hermitienne sur $\mathbb{C}^n$ positive et non dégénérée ?

Solution : Considérons f une forme quadratique $\mathbb{R}^n$ et $A = (a_{ij})$ sa matrice dans la base canonique ; on écrira : $f(X) = X^T AX = (AX, X)$ où $X = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ est le vecteur X relativament à la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Supposons que la forme f est positive non dégénérée.

1. – Montrons qu'il existe des formes linéaires ℓ_i telles que : $\ell_i(X) = \displaystyle\sum_{j \geq i} a_{ij}\xi_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$,

   $f(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} [\ell_i(X)]^2$

   Nous ferons la démonstration par récurrence sur n. Le résultat est vrai si $n = 1$; il suffit donc de faire l'hypothèse qu'il est vrai pour l'entier $n - 1$ et de montrer alors qu'il est vrai pour l'entier n.
   En considérons $f(X)$ comme un trinôme en ξ_1, nous écrirons :

$$f(X) = a_{11}\xi_1^2 + 2\xi_1 \sum_{j=2}^{n} a_{1j}\xi_j + f_1(X),$$

   où $f_1(X)$ est une forme quadratique où ne figure pas ξ_1.
   Le terme a_{11} valeur prise par f si X est le premier vecteur de la base canonique n'est pas nul (par

hypothèse $f(X)$ non dégénérée positive est nulle si et seulement si X est nul).
Nous pouvons donc mettre le trinôme en ξ_1 sous forme canonique :

$$f(X) = a_{11}\left(\xi_1^2 + 2\xi_1 \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{11}}\xi_j\right)^2 + g(X)$$

où $g(X)$ est une forme quadratique où ne figure pas ξ_1.
La forme linéaire $\ell_1(X)$ est la seule qui contienne la variable ξ_1 ; tous les termes en ξ_1 de $f(X)$ doivent donc se retrouver dans le carré de $\ell_1(X)$, ce qui implique :

$$[\ell_1(X)]^2 = a_{11}\left(\xi_1^2 + 2\xi_1 \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{11}}\xi_j\right)^2$$

et donc :

$$\ell_1(X) = \pm\sqrt{a_{11}}\left(\xi_1^2 + 2\xi_1 \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{11}}\xi_j\right)$$

– Montrons que ces formes sont uniques si on impose les conditions : $a_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$; en effet, si nous imposons au coefficint de ξ d'être positif, soit $a_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$, alors la forme ℓ_1 est unique.
Avec le choix qui vient d'être fait de ℓ_1, nous avons décomposé la forme f en la somme :

$$[\ell_1(X)]^2 + g(X)$$

du carré de ℓ_1 et d'une forme quadratique g sur $\mathbb{R}^{n-1}$ (g est une application dépendant de $\xi_2, \ldots, \xi_n$ seulement). Tout vecteur $X_1 = (\xi_2, \ldots, \xi_n)$ de $\mathbb{R}^{n-1}$ peut être complété par un nombre ξ_1 tel que $X = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ annule $\ell_1(X)$; dans ces conditions, $g(X_1) = f(X)$ est positif et ne peut être nul que si X et donc X_1 sont nuls : comme f, la forme g est positive et non dégénérée. Nous pouvons donc affirmer l'existence et l'unicité de formes linéaires $\ell_2, \ldots, \ell_n$ satisfaisant aux conditions posées et telles que

$$g(X) = \sum_{i=2}^{n} [\ell_i(X)]^2$$

2. Montrons qu'il existe une matrice triangulaire supérieure et une seule $\Theta = (\theta_{ij})$ satisfaisant aux conditions : "les termes θ_{ii} de la diagonale sont positifs $A = \Theta^T\Theta$", en effet, la matrice T des coefficients des formes linéaires ℓ_i est triangulaire supérieure et ses termes dans la diagonale sont positifs ; si :

$$Y = \Theta X$$

est la matrice colonne dont les termes sont les $\ell_i(X)$, nous avons montré que :

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n} [\ell_i(X)]^2 = Y^T Y = X^T \Theta^T \Theta X.$$

La matrice de la forme quadratique f est donc : $\Lambda = \Theta^T\Theta$.
Réciproquement : s'il existe une matrice triangulaire supérieure $\widehat{\Theta}$ dont les termes dans la diagonale sont positifs et telle que

$$\Lambda = \widehat{\Theta}^T \widehat{\Theta}$$

les formes linéaires $\widehat{\ell_i}$ dont les coefficients sont les termes des lignes de Θ satisfont aux conditions de la question 1. :

$\widehat{\ell_i}$ ne dépend que des coordonnées ξ_j d'indice $j \geq i$;

le coefficient de ξ_i dans $\widehat{\ell_i}$ est positif :

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n} [\widehat{\ell}_i(X)]^2$$

nous avons montré que ces conditions entraînent l'unicité des formes $\widehat{\ell_i}$ et donc la matrice Θ ;
d'où $\widehat{\Theta} = \Theta$.

3. Supposons que la matrice A est la matrice d'une forme quadratique hermitienne sur $\mathbb{C}^n$ positive et non dégénérée : Une étude identique à celle de la question 1. au remplacement près des trinômes du second degré par des trinômes hermitiens permet d'établir le résultat suivant : il existe des formes linéaire ℓ_i telles que

$$\ell_i(X) = \sum_{j \geq i} \alpha_{ij} \xi_j, \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n} |\ell_i(X)|^2 = \sum_{i=1}^{n} \overline{\ell_i(X)} \ell_i(X),$$

et ces formes sont uniques si on suppose en outre que $\alpha_{ii} \geq 0$ pour $(i = 1, 2, \ldots, n)$
comme dans la question 2., on montre que ce résultat implique qu'il existe une matrice triangulaire supérieur Θ et une seule telle que :

les termes θ_{ii} de la diagonale sont positifs

$$\Lambda = \bar{\Theta}^T \Theta$$

où $\bar{\Theta}$ désigne la matrice dont les termes sont les conjugués des termes de la matrice Θ.

$\square$